



TITLE:

無限次元ユニタリ群のPeter-Weylの定理について(群の表現と非可換調和解析)

AUTHOR(S):

櫻井, 孝俊

CITATION:

櫻井, 孝俊. 無限次元ユニタリ群のPeter-Weylの定理について(群の表現と非可換調和解析). 数理解析研究所講究録 1983, 481: 178-187

ISSUE DATE:

1983-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103387>

RIGHT:

無限次元ユニタリ群のPeter-Weylの定理について

福岡教育大

櫻井 孝俊
Sakurai Takatoshi

コンパクト、リーマン多様体 M 上の複素数値 C^∞ 関数のなす空間を $C^\infty(M)$ 、複素数値ス乗可積分関数のなすヒルベルト空間を $L^2(M)$ 、 $C^\infty(M)$ の双対空間を $C^\infty(M)^*$ で表わすことにする。以下では、 E, H, E^* により、それぞれ $C^\infty(M), L^2(M), C^\infty(M)^*$ を表わすことにする。 E の線型変換 g で、 E の同相写像であり、 H のノルムを変えない（すなわち、 $\|g\xi\| = \|\xi\|$, $\xi \in E$ ）もの全体からなる群を $U(E)$ で表わし、無限次元ユニタリ群と呼ぶ。さて、積多様体 $M \times M$ 上の複素数値関数空間 $C^\infty(M \times M) \cong E \hat{\otimes} E$, $L^2(M \times M) \cong H \bar{\otimes} H$, $C^\infty(M \times M)^* \cong (E \hat{\otimes} E)^*$ ($E \hat{\otimes} E$ は $E \otimes E$ の完備化、 $H \bar{\otimes} H$ は $H \otimes H$ の完備化を表わす) を考えよう。 $\Omega = (E \hat{\otimes} E)^*$ とおく。 $U(E)$ の元 g に対して、 $E \hat{\otimes} E$ の線型写像 L_g, R_g を、

$$L_g(\xi \otimes \eta) = g\xi \otimes \eta, \quad R_g(\xi \otimes \eta) = \xi \otimes g\eta$$

により定義し、 g の Ω への作用 $g\xi, \xi g$ を

$$\langle g z, z \rangle = \langle z, L_{g^{-1}} z \rangle, \quad \langle z g, z \rangle = \langle z, R_g z \rangle$$

により定義する。また、 g は、

$$\langle g, z \otimes \eta \rangle = (z, g \eta)$$

と定義することにより、 $E \hat{\otimes} E$ 上の線型変換と見なすことができる。このことより、 $U(E)$ も Ω の部分集合と思うことができる。

Gel'fand triple

$$E \hat{\otimes} E \subset H \hat{\otimes} H \subset (E \hat{\otimes} E)^*$$

をつくれば、Bochner-Minlos の定理により Ω 上に複素ガウス測度 ν で、

$$e^{-\|z\|^2} = \int_{\Omega} e^{i\{\langle z, z \rangle + \overline{\langle z, z \rangle}\}} d\nu(z) \quad z \in E \hat{\otimes} E$$

も満足するものが存在する。明らかに、測度 ν は、 $U(E)$ の左、右からの作用に対して不変ゆえ、 $U(E)$ の元 g に対し、

$$(\pi_L(g)f)(z) = f(g^{-1}z), \quad (\pi_R(g)f)(z) = f(zg) \quad f \in L^2(\Omega, \nu)$$

と定義することにより、 $U(E)$ のユニタリ表現 $(\pi_L, L^2(\Omega, \nu))$, $(\pi_R, L^2(\Omega, \nu))$ を得る。さらに、 $U(E) \times U(E)$ の元 (g_1, g_2) に対し

$$(\omega_*(g_1, g_2)f)(z) = f(g_1^{-1} z g_2) \quad f \in L^2(\Omega, \nu)$$

により、 $U(E) \times U(E)$ のユニタリ表現 $(\omega_*, L^2(\Omega, \nu))$ を得る。この ω_* の既約分解 (定理 2) を与えることが目標である。

M 上の実数値 C^∞ 関数からなる、 H の正規直交基底を、 $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ とすれば、 $\{\xi_i \otimes \xi_j; i, j \in N\}$ により、 $H \otimes H$ の正規直交基底が得られる。 N は自然数全体を表わす。そこで、複素エルミート多項式

$$H_{p,q}(t, \bar{t}) = (-1)^{p+q} e^{t\bar{t}} \frac{\partial^{p+q}}{\partial \bar{t}^p \partial t^q} e^{t\bar{t}} \quad (t \in \mathbb{C})$$

を用いて、 $B_{p,q}$ を次で定義する。

$$B_{p,q} = \left\{ \prod_{i,j=1}^{\infty} (p_{ij}! q_{ij}!)^{-\frac{1}{2}} H_{p_{ij}, q_{ij}}(\langle z, \xi_i \otimes \xi_j \rangle, \langle \bar{z}, \xi_i \otimes \xi_j \rangle); \right.$$

$$\left. \sum_{i,j=1}^{\infty} p_{ij} = p, \sum_{i,j=1}^{\infty} q_{ij} = q, p_{ij}, q_{ij} \geq 0 \right\}$$

このとき、 $\bigcup_{n=0}^{\infty} \left(\bigcup_{p+q=n} B_{p,q} \right)$ は、 $L^2(\Omega, \nu)$ の正規直交基底となる。 $\mathcal{H}_{p,q}$ を $B_{p,q}$ により張られる閉部分空間とおけば、 $L^2(\Omega, \nu)$ の Wiener-Itô 分解

$$L^2(\Omega, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \sum_{p+q=n} \mathcal{H}_{p,q}$$

が得られる。 $\mathcal{H}_{p,q}$ が、 $\omega_*(U(E) \times U(E))$ 不変部分空間であることに注意すれば、 $U(E) \times U(E)$ のユニタリ部分表現 $(\omega_{p,q}, \mathcal{H}_{p,q})$ を得る。

次に、 $U(E)$ の既約ユニタリ表現を構成しよう。 M の $(p+q)$ 個の直積 $M \times \dots \times M$ の点を $(u, v) = (u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ で表わすことにする。上次の対称群を \mathfrak{S}_r とする。 $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_q$ は、次のよう

に $M \times \cdots \times M$ 上に右から作用する。

$$(u \cdot \alpha, v \cdot \tau) = (u_{\alpha(1)}, \dots, u_{\alpha(p)}, v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(g)}) \quad (\alpha, \tau) \in G_p \times G_g$$

(P, V_P) を G_p の既約ユニタリ表現, (δ, V_δ) を G_g の既約ユニタリ

表現とし, $M \times \cdots \times M$ ($p+g$ 個) の, $\text{Hom}(V_\delta, V_P)$ に値をもつ,

ス乗可積分関数のなすヒルベルト空間を, $L^2(M: p+g, \text{Hom}(V_\delta, V_P))$

で表わし, $\mathcal{H}_{p,g,p,\delta}$ を

$$\mathcal{H}_{p,g,p,\delta} = \{ f \in L^2(M: p+g, \text{Hom}(V_\delta, V_P)) ;$$

$$f(u \cdot \alpha, v \cdot \tau) = P(\alpha)^{-1} f(u, v) \delta(\tau), \alpha \in G_p, \tau \in G_g \}$$

で定義する。ここで

$$\mathcal{H}_{p,g,p,\delta} \subset L^2(M: p+g, V) \cong L^2(M: p+g) \otimes V \cong L^2(M) \bar{\otimes} \cdots \bar{\otimes} L^2(M) \otimes V$$

(但し, $V = \text{Hom}(V_\delta, V_P)$) なる同型があるので, $U(E)$ の

$\mathcal{H}_{p,g,p,\delta}$ 上へのユニタリ表現を次のように構成する。 g を

$U(E)$ の元とし

$$\hat{\pi}_{p,g}(g)(\xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_p} \otimes \xi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{k_g}) = g \xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes g \xi_{i_p} \otimes g^* \xi_{k_1} \otimes \cdots \otimes g^* \xi_{k_g}$$

$$(\xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_p} \otimes \xi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{k_g} \in L^2(M) \bar{\otimes} \cdots \bar{\otimes} L^2(M))$$

と定義する。ここで g^* は g の随伴作用素を表わす。このとき

次の可換な図式

$$L^2(M: p+g, V) \cong L^2(M: p+g) \otimes V \cong L^2(M) \bar{\otimes} \cdots \bar{\otimes} L^2(M) \otimes V$$

$$\downarrow \hat{\pi}_{p,g,p,\delta}(g) \quad \hookrightarrow \quad \downarrow \hat{\pi}_{p,g}(g) \otimes I \quad \hookrightarrow \quad \downarrow \hat{\pi}_{p,g}(g) \otimes I$$

$$L^2(M: p+g, V) \cong L^2(M: p+g) \otimes V \cong L^2(M) \bar{\otimes} \cdots \bar{\otimes} L^2(M) \otimes V$$

(但し, I は V 上の恒等写像を表わす)

を満足するような、 $L^2(M: p+g)$ 上のユニタリ作用素 $\tilde{\pi}_{p,g}(g)$ 及び、 $L^2(M: p+g, \text{Hom}(V_\delta, V_p))$ 上のユニタリ作用素 $\tilde{\pi}_{p,g,p,\delta}(g)$ が存在する。また、 $\hat{\lambda}(\alpha, \tau), \tilde{\lambda}(\alpha, \tau)$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}(\alpha, \tau)(\xi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_p} \otimes \xi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{k_g}) \\ = \xi_{i_{\alpha(1)}} \otimes \cdots \otimes \xi_{i_{\alpha(p)}} \otimes \xi_{k_{\tau(1)}} \otimes \cdots \otimes \xi_{k_{\tau(g)}} \end{aligned}$$

$$(\tilde{\lambda}(\alpha, \tau)f)(u, v) = f(u \cdot \alpha, v \cdot \tau) \quad (f \in L^2(M: p+g, V))$$

と定義すれば、次の可換な図式

$$\begin{array}{ccc} L^2(M: p+g, V) & \cong & L^2(M) \bar{\otimes} \cdots \bar{\otimes} L^2(M) \otimes V \\ \downarrow \tilde{\lambda}(\alpha, \tau) & \circlearrowleft & \downarrow \hat{\lambda}(\alpha, \tau) \otimes I \\ L^2(M: p+g, V) & \cong & L^2(M) \bar{\otimes} \cdots \bar{\otimes} L^2(M) \otimes V \end{array}$$

が得られる。 $\tilde{\pi}_{p,g,p,\delta}(g)$ と $\tilde{\lambda}(\alpha, \tau)$ とが可換ゆえ、 $\mathcal{H}_{p,g,p,\delta}$ は、 $\tilde{\pi}_{p,g,p,\delta}(g)$ 不変部分空間である。したがって、 $U(E)$ のユニタリ表現 $(\pi_{p,g,p,\delta}, \mathcal{H}_{p,g,p,\delta})$ が得られる。

定理 1 1) (p, V_p) を \mathbb{G}_p の既約表現, (δ, V_δ) を \mathbb{G}_g の既約表現とすれば、 $(\pi_{p,g,p,\delta}, \mathcal{H}_{p,g,p,\delta})$ は既約表現である。

2) $\pi_{p,g,p,\delta}$ と $\pi_{p',g',p',\delta'}$ とが同値な表現となる必要十分条件は、 $p=p', g=g'$ かつ、 p と p', δ と δ' とが、それぞれ同値な表現となることである。

$$(M: \vdash)' = \{(u_1, \dots, u_r) \in M \times \cdots \times M; u_i \neq u_j (i \neq j)\} \text{ とおく。}$$

このとき、 $M \times \cdots \times M$ (p 個)の開集合 F_p と $M \times \cdots \times M$ (q 個)の開集合 F_q を、次の写像

$$F_p \times F_q \times \mathcal{G}_p \times \mathcal{G}_q \ni (u, v, \sigma, \tau) \mapsto (u \cdot \sigma, v \cdot \tau) \in (M:p)' \times (M:q)'$$

が全単射となるように、とることができる。 $L^2(\mathcal{G}_r)$ を \mathcal{G}_r 上の関数全体とし、 \mathcal{G}_r に正規化されたハール測度を入れると、 \mathcal{G}_r に対する Peter-Weyl の定理により、

$$L^2(\mathcal{G}_r) = \sum_{P \in \hat{\mathcal{G}}_r} \oplus (V_P \otimes V_P^*)$$

を得る。以上より次の同型が得られる。

$$\begin{aligned} L^2(M:p+q) &\cong L^2(F_p \times F_q \times \mathcal{G}_p \times \mathcal{G}_q) \\ &\cong (L^2(F_p) \otimes L^2(\mathcal{G}_p)) \bar{\otimes} (L^2(F_q) \otimes L^2(\mathcal{G}_q)) \\ &\cong \left(\sum_{P \in \hat{\mathcal{G}}_p} L^2(F_p) \otimes V_P \otimes V_P^* \right) \bar{\otimes} \left(\sum_{\delta \in \hat{\mathcal{G}}_q} L^2(F_q) \otimes V_\delta \otimes V_\delta^* \right) \\ &\cong \sum_P \sum_\delta (L^2(F_p) \bar{\otimes} L^2(F_q) \otimes V_P \otimes V_\delta^*) \otimes V_P^* \otimes V_\delta \\ &\cong \sum_P \sum_\delta L^2(F_p \times F_q, \text{Hom}(V_\delta, V_P)) \otimes V_P^* \otimes V_\delta \\ &\cong \sum_P \sum_\delta \mathcal{H}_{p,q,p,\delta} \otimes V_P^* \otimes V_\delta \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \sum_P \sum_\delta (\dim(V_P^* \otimes V_\delta))^2 &= (\sum_P (\dim V_P)^2) (\sum_\delta (\dim V_\delta)^2) \\ &= p! q! \end{aligned}$$

となる。したがって、定理 1 の証明は、 $L^2(M:p+q)$ 上の intertwining 作用素の空間 $\text{Hom}_{U(E)}(L^2(M:p+q), L^2(M:p+q))$ の次元が $p! q!$ であることを示せばよい。しかし、この為には

まだ準備が必要なので、ここでは省略する ([4] を参照)。

ω_* の既約成分は、“Peter-Weyl の定理” の類似として、次の定理 2 により与えられる。

定理 2 (Peter-Weyl の定理) ω_* は、次の既約分解をもつ。

$$L^2(\Omega, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{p+q=n} \bigoplus_{P \in \hat{G}_p} \sum_{\delta \in \hat{G}_q} \bigoplus (\mathcal{H}_{p,q,p,\delta} \otimes \mathcal{H}_{p,q,p,\delta}^*)$$

ここで、 $\omega_{p,q}(g_1, g_2)$ は、 $\pi_{p,q,p,\delta}(g_1) \otimes \pi_{p,q,p,\delta}^*(g_2)$ と対応している。

(証明) $L^2(\Omega, \nu)$ の Wiener-Itô 分解は、

$$L^2(\Omega, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{H}_{p,q}$$

であった。ここに現われる $\mathcal{H}_{p,q}$ は、以下のような特徴づけがなされる。 $L^2(\Omega, \nu)$ の元 f を、 $E \otimes E$ 上の汎関数に写す写像 \mathcal{I} を、

$$(\mathcal{I}f)(z) = \int_{\Omega} e^{i\{\langle z, z \rangle + \overline{\langle z, z \rangle}\}} \overline{f(z)} d\nu(z)$$

で定義する。例えば、 $\mathcal{H}_{p,q}$ の元として

$$\varphi = \prod_{i,j=1}^{\infty} (p_{ij}! q_{ij}!)^{-\frac{1}{2}} H_{p_{ij}, q_{ij}}(\langle \cdot, \xi_i \otimes \xi_j \rangle, \overline{\langle \cdot, \xi_i \otimes \xi_j \rangle})$$

をとれば、

$$(\mathcal{I}\varphi)(z) = e^{-\|z\|^2} i^{p+q} \prod_{i,j=1}^{\infty} \overline{(\langle z, \xi_i \otimes \xi_j \rangle)^{p_{ij}}} (\langle z, \xi_i \otimes \xi_j \rangle)^{q_{ij}}$$

となる。 $\sum_{i,j} p_{ij} + \sum_{i,j} q_{ij} = p+q$ ゆえ $\prod_{i,j} (\zeta_i \otimes \xi_j)^{p_{ij}} (\zeta_i \otimes \xi_j)^{q_{ij}}$ は、 $(M \times M) \times \cdots \times (M \times M)$ ($p+q$ 個) 上の積分となる。そこで、 $(M \times M)$ の $p+q$ 個の積多様体 $(M \times M) \times \cdots \times (M \times M)$ の 2 乗可積分関数のなすヒルベルト空間を $L^2(M \times M: p+q)$ で表わし、 $L^2(M \times M: p+q)^\wedge$ を、

$$L^2(M \times M: p+q)^\wedge = \{ F \in L^2(M \times M: p+q);$$

$$F((u_{\alpha(1)}^1, u_{\alpha(1)}^2), \dots, (u_{\alpha(p)}^1, u_{\alpha(p)}^2), (v_{\tau(1)}^1, v_{\tau(1)}^2), \dots, (v_{\tau(q)}^1, v_{\tau(q)}^2)) \\ = F((u_1^1, u_1^2), \dots, (u_p^1, u_p^2), (v_1^1, v_1^2), \dots, (v_q^1, v_q^2)), \alpha \in \mathfrak{S}_p, \tau \in \mathfrak{S}_q \}$$

とおく。このとき、 $\mathfrak{H}_{p,q}$ の任意の元 f に対して、 $L^2(M \times M: p+q)^\wedge$ の元 F が唯一つ存在して

$$(\mathcal{I}f)(\zeta) = e^{-\|\zeta\|^2} \int_{(M \times M) \times \cdots \times (M \times M)} F((u_1^1, u_1^2), \dots, (u_p^1, u_p^2), (v_1^1, v_1^2), \dots, (v_q^1, v_q^2))$$

$$\times \zeta(u_1^1, u_1^2) \cdots \zeta(u_p^1, u_p^2) \zeta(v_1^1, v_1^2) \cdots \zeta(v_q^1, v_q^2) du_1^1 du_1^2 \cdots dv_q^1 dv_q^2$$

となる。したがって、次の同型が得られる。

$$\mathfrak{H}_{p,q} \cong L^2(M \times M: p+q)^\wedge$$

\mathfrak{S}_p の元 α と、 \mathfrak{S}_q の元 τ 、及び、 $L^2(M: p+q)$ の元 f に対し、

$$(\lambda(\alpha, \tau)f)(u, v) = f(u \cdot \alpha, v \cdot \tau)$$

と定義すれば、 $L^2(M: p+q) \cong \sum_p \sum_q \mathcal{H}_{p,q,p,q} \otimes V_p^* \otimes V_q$ において、 $\lambda(\alpha, \tau)$ は $I \otimes \rho^*(\alpha) \otimes \delta(\tau)$ と対応する。但し I は、 $\mathcal{H}_{p,q,p,q}$ 上の恒等写像を表わす。したがって、以下の同型が

得られる。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{p,g} &\cong L^2(M \times M : p+g)^\wedge \\
 &\cong \{f \in L^2(M : p+g) \otimes L^2(M : p+g); (\lambda(\alpha, \tau) \otimes \lambda(\alpha, \tau))f = f \\
 &\quad \alpha \in \mathcal{G}_p, \tau \in \mathcal{G}_g\} \\
 &\cong \{\gamma \in \sum_{P_1} \sum_{\delta_1} \sum_{P_2} \sum_{\delta_2} (\mathcal{H}_{p,g,P_1,\delta_1} \otimes V_{P_1}^* \otimes V_{\delta_1}) \otimes (\mathcal{H}_{p,g,P_2,\delta_2} \otimes V_{P_2}^* \otimes V_{\delta_2}); \\
 &\quad (I \otimes P_1^*(\alpha) \otimes \delta_1(\tau) \otimes I \otimes P_2^*(\alpha) \otimes \delta_2(\tau)) \gamma = \gamma, \alpha \in \mathcal{G}_p, \tau \in \mathcal{G}_g\} \\
 &\cong \sum_p \sum_\delta \mathcal{H}_{p,g,p,\delta} \otimes \mathcal{H}_{p,g,p,\delta}^* \\
 &\cong \sum_p \sum_\delta \mathcal{H}_{p,g,p,\delta} \otimes \mathcal{H}_{p,g,p,\delta}^*
 \end{aligned}$$

なお、上記の式変形において

$$\dim \{w \in V_{P_1}^* \otimes V_{\delta_1} \otimes V_{P_2}^* \otimes V_{\delta_2}; (P_1^*(\alpha) \otimes \delta_1(\tau) \otimes P_2^*(\alpha) \otimes \delta_2(\tau))w = w, \\
 \alpha \in \mathcal{G}_p, \tau \in \mathcal{G}_g\}$$

$$= \begin{cases} 0 & (P_1 \neq P_2^* \text{ または } \delta_1^* \neq \delta_2) \\ 1 & (P_1 \simeq P_2^* \text{ から } \delta_1^* \simeq \delta_2) \end{cases}$$

となることを用いた。 $P_1 \simeq P_2^*$ は P_1 と P_2^* とが同値な表現であることを表す。

以上により、 $L^2(\Omega, \mathcal{L})$ の既約分解が証明された。 $\omega_{p,g}(g_1, g_2)$ が、 $\pi_{p,g,p,\delta}(g_1) \otimes \pi_{p,g,p,\delta}^*(g_2)$ に対応していることは、明らかであろう。

参考文献

- [1] T. Hida, Brownian motion, Springer-Verlag (1980).
- [2] H. Matsushima, K. Okamoto and T. Sakurai, On a certain class of irreducible unitary representations of the infinite dimensional rotation group I, Hiroshima Math. J. 11 (1981), 181-193.
- [3] K. Okamoto and T. Sakurai, On a certain class of irreducible unitary representations of the infinite dimensional rotation group II, Hiroshima Math. J. 12 (1982), 385-397.
- [4] K. Okamoto and T. Sakurai, An analogue of Peter-Weyl theorem for the infinite dimensional unitary group, Hiroshima Math. J. to appear.